



Серия №19. Гомотетия и конструкции

12 июля

Определение. Гомотетия с центром O и коэффициентом $k \neq 0$ – это преобразование плоскости H_O^k , которое каждую точку M плоскости переводит в точку M_1 такую, что $\overrightarrow{OM_1} = k \cdot \overrightarrow{OM}$.

Свойства

- Точка, её образ и центр гомотетии лежат на одной прямой.
- Вектор \overrightarrow{AB} переходит в вектор $k \cdot \overrightarrow{AB}$, и все расстояния умножаются на $|k|$.
- Прямая переходит в параллельную прямую, окружность – в окружность.

1. Теорема о 4 точках трапеции. Середины оснований трапеции, точка пересечения диагоналей и точка пересечения продолжений боковых сторон лежат на одной прямой.

Задачи

- 2.** Стороны двух неравных треугольников параллельны друг другу. Докажите, что существует центр гомотетии, переводящей один из них в другой.
- 3. Лемма Архимеда.** Две окружности касаются друг друга в точке A . Некоторая прямая касается первой окружности в точке D и пересекает вторую окружность в точках B и C . Докажите, что прямая AD проходит через середину дуги BC второй окружности.
- 4. Окружность Эйлера.** Дан треугольник ABC . Точка H – ортоцентр, точка O – центр описанной окружности. Докажите, что в треугольнике ABC основания высот, середины сторон, середины отрезков AH , BH , CH лежат на одной окружности, центр которой лежит на середине отрезка OH .
- 5.** а) В треугольнике ABC вписанная и невписанная окружности касаются стороны BC в точках M и N соответственно. MP – диаметр вписанной окружности. Докажите, что точки A , P , N лежат на одной прямой.
б) Пусть I – центр вписанной окружности, E – середина высоты AH треугольника ABC . Докажите, что точки E , N , I лежат на одной прямой.
в) Пусть I_A – центр невписанной окружности, касающейся BC . Докажите, что точки E , M , I_A лежат на одной прямой.
- 6. Прямая Симсона.** На меньшей дуге AB описанной окружности треугольника ABC отмечена точка D . Из точки D на прямые AC , BC опущены перпендикуляры DX , DY . Точка H – ортоцентр треугольника ABC . Высоты AH и BH пересекают описанную окружность в точках P и Q . Точки M и N таковы, что X – середина MH , Y – середина NH . Докажите, что:
а) $\triangle MDX = \triangle XDQ$, $\triangle NDY = \triangle DYP$.
б) Точки M , D , N лежат на одной прямой.
в) Прямая Симсона точки D относительно треугольника ABC (прямая XY) делит отрезок DH пополам – в точке, лежащей на окружности Эйлера.
- 7.** Вписанная окружность треугольника ABC касается сторон AB , AC , BC в точках K , L , M соответственно, I – центр вписанной окружности. Прямые KL и MI пересекаются в точке X . Докажите, что прямая AX проходит через середину стороны BC .

- 8. Полувыписанная окружность.** Дан треугольник ABC , вокруг него описана окружность ω . Точка S – середина дуги ABC окружности ω . Окружность ω_1 касается внутренним образом окружности ω в точке T , а также сторон AB и BC в точках K и L . Биссектриса угла BAC пересекает прямую KL в точке I . Докажите, что:
- а) Точки T, A, K, I лежат на одной окружности.
 - б) $\angle AIT = \angle ILT$.
 - в) I – точка пересечения биссектрис треугольника ABC .
 - г) $IK = IL$.
 - д) Точки T, I, S лежат на одной прямой.
- 9. Композиция гомотетий.** Даны две точки O_1 и O_2 . Вне прямой O_1O_2 выбирается точка A . Пусть $H_{O_1}^{k_1}(A) = B$ и $H_{O_2}^{k_2}(B) = C$. Числа k_1 и k_2 фиксированы. Докажите, что:
- а) Если $k_1k_2 \neq 1$, то прямая AC пересекает прямую O_1O_2 в точке O , не зависящей от выбора точки A .
 - б) $\frac{\overrightarrow{OC}}{\overrightarrow{OA}} = k_1k_2$.
 - в) Композиция двух гомотетий с различными центрами O_1 и O_2 и коэффициентами k_1, k_2 является либо гомотетией с коэффициентом k_1k_2 (в случае, если это произведение не равно 1) и центром, лежащим на прямой O_1O_2 , либо параллельным переносом на вектор, параллельный O_1O_2 .
 - г) **Теорема Монжа.** Для трёх произвольных окружностей, каждая из которых не лежит целиком внутри другой, точки пересечения общих внешних касательных к каждой паре окружностей лежат на одной прямой.